


1. Дан набор из нескольких различных векторов в пространстве. Известно, что каждый вектор набора равен сумме нескольких других из этого набора. Найдите наименьшее возможное число векторов в наборе.

2. Отрезок CL — биссектриса треугольника ABC . Окружность с диаметром AB перпендикулярна плоскости треугольника. На этой окружности выбраны точки D и E таким образом, что отрезок DE проходит через точку L . Докажите, что $\angle DCL = \angle ECL$.

3. Дан выпуклый 1000-угольник $A_1A_2 \dots A_{1000}$. Известно, что все его главные диагонали и главные средние линии проходят через некоторую точку O . Докажите, что этот многоугольник центрально симметричен. (Главная диагональ — это диагональ вида A_iA_{i+500} ; главная средняя линия — отрезок, соединяющий середины сторон A_iA_{i+1} и $A_{i+500}A_{i+501}$; мы считаем $A_{1001} = A_1$.)

4. На медиане AM треугольника ABC взята такая точка K , что $\angle BKC + \angle BAC = 180^\circ$. Докажите, что $AB \cdot CK = AC \cdot BK$.

5. Квадрат 100×100 разбили на Т-тетрамино. Может ли количество горизонтальных тетрамино отличаться от количества вертикальных ровно на 2? (Т-тетрамино — это фигурки вида ; их можно поворачивать. При этом тетрамино горизонтально, если три его клетки находятся в одной горизонтали, и вертикально иначе.)

6. Фокусник показывает такой фокус. Он выписал на карточки k подмножеств A_1, \dots, A_k множества $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, 2007\}$. Зрители задумывают подмножество $B \subset \mathcal{X}$, вычисляют для каждого i количество элементов в множестве $B \cap A_i$ и сообщают полученные результаты (в произвольном порядке) фокуснику. После этого тот называет подмножество B .

Фокусник хочет выбрать систему подмножеств A_1, \dots, A_k с минимальным возможным k так, чтобы фокус наверняка удался. Сколько у него способов это сделать?

7. Леша и Володя играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой бумаге. Они ходят по очереди, но Леша ставит за ход по 10 крестиков, а Володя — по одному нолику. Леша выиграет, если сможет за 5 первых своих ходов поставить 30 крестиков, идущих подряд по вертикали или горизонтали. Сможет ли Володя ему помешать?

8. По кругу расставлены 2007 целых чисел. Известно, что для любых пяти последовательных чисел сумма некоторых трех из них равна удвоенной сумме оставшихся двух. Найдите все такие расстановки.

9. Число a_n равно расстоянию от $n\sqrt{2}$ до ближайшего целого. Верно ли, что среди чисел вида $a_1 + \dots + a_n$ бесконечное число целых?


10. Натуральное число n таково, что число $2^n + 1$ — простое. Докажите, что $2^n + 1$ не представляется в виде разности пятых степеней двух натуральных чисел.

1. Дан набор из нескольких различных векторов на плоскости. Известно, что каждый вектор набора равен сумме нескольких других из этого набора. Найдите наименьшее возможное число векторов в наборе.

2. Девять пенсионеров решили провести турнир в домино так, чтобы любые два в одной партии были партнёрами, а в двух — противниками. (В домино играют пара на пару.) Можно ли организовать такой турнир?

3. Дан выпуклый 1000-угольник $A_1A_2 \dots A_{1000}$. Известно, что все его главные диагонали и главные средние линии проходят через некоторую точку O . Докажите, что этот многоугольник центрально симметричен. (Главная диагональ — это диагональ вида A_iA_{i+500} ; главная средняя линия — отрезок, соединяющий середины сторон A_iA_{i+1} и $A_{i+500}A_{i+501}$; мы считаем $A_{1001} = A_1$.)

4. На медиане AM треугольника ABC взята такая точка K , что $\angle BKC + \angle BAC = 180^\circ$. Докажите, что $AB \cdot CK = AC \cdot BK$.

5. Квадрат 100×100 разбили на Т-тетрамино. Может ли количество горизонтальных тетрамино отличаться от количества вертикальных ровно на 2? (Т-тетрамино — это фигурки вида ; их можно поворачивать. При этом тетрамино горизонтально, если три его клетки находятся в одной горизонтали, и вертикально иначе.)

6. Фокусник показывает такой фокус. Он выписал на карточки k подмножеств A_1, \dots, A_k множества $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, 2007\}$. Зрители задумывают подмножество $B \subset \mathcal{X}$, вычисляют для каждого i количество элементов в множестве $B \cap A_i$ и сообщают полученные результаты (в произвольном порядке) фокуснику. После этого тот называет подмножество B .

При каком наименьшем k фокусник может подобрать множества так, чтобы фокус гарантированно удался?

7. Леша и Володя играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой бумаге. Они ходят по очереди, но Леша ставит за ход по 10 крестиков, а Володя — по одному нолику. Леша выиграет, если сможет за 5 первых своих ходов поставить 30 крестиков, идущих подряд по вертикали или горизонтали. Сможет ли Володя ему помешать?

8. Капитан Колун совершает по одному кругосветному плаванью в год. Первое плавание было в 2005 году. Найдите все годы, в которые номер года будет делиться на номер плавания. (Капитан Колун бессмертен.)

9. Докажите, что для любых ненулевых чисел x, y выполнено неравенство

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

10. Натуральное число n таково, что число $2^n + 1$ — простое. Докажите, что $2^n + 1$ не представляется в виде разности пятых степеней двух натуральных чисел.